Appunti, appelli 2015 e tavole di ANALISI 1 2015/2016 Prof. P. Majer

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

Analisi Matematica I - 004AA- 2015/16

Pietro Majer

I - Linguaggio degli insiemi e premesse algebriche

Definizione ingenua di insieme. Un insieme è caratterizzato dai suoi elementi. Relazione di appartenenza. Modi di descrivere un insieme. Esempio di Russel. Relazione di inclusione. Unione, intersezione, complementazione relativa. Distributività fra unione e intersezione. Leggi di De Morgan. Insieme delle parti di un insieme. Coppie ordinate. Prodotto cartesiano. Funzioni fra insiemi. Grafici di funzioni. Caratterizzazione dei sottoinsiemi di un prodotto cartesiano $A \times B$ che sono grafici di funzioni da A in B. Funzioni iniettive, surgettive, bigettive. La funzione inversa di una funzione bigettiva. Cardinalità finite. Cardinalità di prodotti cartesiani e dell'insieme delle funzioni da A a B: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ e $|B^A| = |B|^{|A|}$. Cardinalità dell'insieme delle funzioni iniettive fra due insiemi. Permutazioni. Fattoriale. Immagine e controimmagine di insiemi tramite una funzione. Funzione caratteristica di un insieme. Cardinalità dell'insieme delle parti, $|P(A)| = 2^{|A|}$. Definizione dei coefficienti binomiali e loro proprietà; simmetria e formula di Stiefel. Buon ordine dei naturali. Esempi classici: irrazionalità della radice quadrata di 2 e della sezione aurea. Principio di induzione. Le proprietà del simbolo di sommatoria: linearità, associatività, slittamento degli indici. Somma dei primi n interi positivi. Somma dei quadrati e dei cubi dei primi n interi positivi. Somma di progressioni geometriche. Formula del binomio di Newton.

II - La retta reale

Gruppi, campi. Relazioni d'ordine. Campi ordinati. Esempi di campi e campi ordinati. Proprietà elementari che discendono dagli assiomi di campo ordinato. L'assioma di completezza di Dedekind per campi ordinati. Esiste un unico campo ordinato completo, a meno di un unico isomorfismo ordinato (senza dimostrazione). Maggioranti, minoranti, insiemi limitati. Esercizi sulla limitatezza di insiemi numerici. Sottoinsiemi numerici. Maggioranti e minoranti di un insieme di numeri. Stima degli zeri di un polinomio. Altra forma dell'assioma di completezza: esistenza dell'estremo superiore.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Caratterizzazioni e proprietà dell'estremo superiore. La proprietà di Archimede segue dalla completezza. La retta estesa; ordinamento ed operazioni algebriche nella retta estesa. Richiami su disequazioni algebriche. Esercizi sulla determinazione di un maggiorante per insiemi definiti in vario modo. Disuguaglianza delle medie geometrica e aritmetica.

III - Limiti di successioni reali

Successioni. Nozione di intorno di un punto nella retta reale, nella retta reale estesa, nel piano cartesiano. Proprietà vere definitivamente e frequentemente. Limiti di successioni. Confronto fra limitatezza e convergenza. Limiti e disuguaglianze: permanenza del segno, teorema dei due carabinieri. Successioni monotone nella retta estesa sono convergenti. Successioni infinitesime. Serie a termini non-negativi. Principio di confronto. Limiti e operazioni algebriche: somma e prodotti di successioni convergenti. Forme indeterminate. Esistenza della radice n-sima di numeri reali positivi. L'algoritmo di Erone per la radice quadrata. La funzione esponenziale reale definita come $\exp(x) = e^x := \lim_{n\to\infty}(1 + x/n)^n$: il limite esiste ed è un reale positivo. Proprietà dell'esponenziale reale. Se (x_n) converge ad α allora $(1 + x_n/n)^n$ converge a e^α . Per x e y reali vale $e^x + y = e^x e^y$. Per $x \leq y$ vale $e^x(y - x) \leq e^y - e^x \leq e^y(y - x)$. Calcolo di limiti della forma $(P(n)/Q(n))^n$ con P e Q in $\mathbb{R}[x]$. La funzione exp è e^m-lipschitziana sull'intervallo $]-\infty, m]$. Disuguaglianza $e^x \geq 1 + x$ per $x \in \mathbb{R}$. La funzione esponenziale è strettamente crescente e bigettiva fra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_+$. La funzione logaritmo naturale.

IV - Funzioni continue di una variabile reale

Funzioni continue in un punto. Intorni relativi di $x \in A \subset \mathbb{R}$ in A. Considerazioni generali. Definizioni equivalenti. Composizione di funzioni continue. La convergenza di successioni come continuità puntuale di una funzione. Continuità e continuità sequenziale. Somme e prodotti di funzioni continue. Carattere locale della proprietà di continuità. Funzioni k-lipschitziane. Le funzioni lipschitziane sono continue. La funzione $f(x) = x^2$ è $2T$-lipschitziana su $[-T, T]$, e non è lipschitziana su $\mathbb{R}$. La funzione exp è e^m-lipschitziana sull'intervallo $]-\infty, m]$. La funzione $\log(x)$ è $1/c$-lipschitziana sull'intervallo $[c, +\infty[$. Principio di permanenza del segno per funzioni continue. Il teorema degli zeri. Algoritmo di bisezione. L'immagine continua di un intervallo è un intervallo. Successioni definite per ricorrenza iterando una funzione $f : I \to I$

su un intervallo I: $x_{n+1} = f(x_n)$ con $x_0 \in I$. Esempi di comportamento caotico: la mappa tenda. Caso di f continua e crescente: monotonia delle orbite, convergenza a punti fissi. Limiti di funzioni. Continuità, limiti di funzioni, limiti di successioni. Proprietà elementari dei limiti. Serie numeriche. Condizione necessaria per la convergenza. Serie a termini non-negativi. Confronto. Criterio della radice, criterio del rapporto. Riordinamenti di serie. Convergenza assoluta di serie. Criterio di convergenza di Leibnitz per serie a segno alterno. Convergenza dominata per serie. Serie esponenziale.

V - I numeri complessi

Campo dei numeri complessi. Somma, prodotto, inverso, parte reale e immaginaria, coniugato, valore assoluto di numeri complessi. Azione dei numeri complessi sul piano per moltiplicazione. Numeri complessi come matrici conformi speciali di ordine 2. Nozioni di distanza, dischi, intorni nei complessi. Successioni convergenti in $\mathbb{C}$. Serie complesse. Serie complesse assolutamente convergenti. Esponenziale complesso $\exp(z) = e^z := \lim_{n\to\infty}(1 + z/n)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$. Stima del resto per la serie esponenziale complessa: $|e^z - \sum_{k=0}^{n} z^k/k!| \leq |z|^{n+1}e^{|z|}/(n+1)!$. In particolare $|e^z - 1| \leq |z|e^{|z|}$ e $|e^z - 1 - z| \leq |z|^2 e^{|z|}/2$. Lipschitzianità locale della funzione esponenziale complessa. Funzioni $\cos(t)$ e $\sin(t)$ come parte reale e immaginaria di e^{it}. Formule di somma, duplicazione e bisezione per $\cos(t)$ e $\sin(t)$. Simmetria pari e dispari. Sviluppi in serie per $\cos(t)$ e $\sin(t)$. Studio della funzione $\cos(t)$ definita come $\cos(x) := \mathrm{Re}(e^{it}) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}/(2k)!$. Stima del minimo zero positivo. Periodicità delle funzioni trigonometriche.

VI - Calcolo differenziale in una variabile

Grafici di funzioni; trasformazioni e simmetrie. Funzioni infinitesime. Notazione di Landau O piccolo e O grande. Regole di calcolo. Calcolo di limiti in notazione di Landau. Sviluppi polinomiali di ordine n di una funzione in un punto. Sviluppi polinomiali di alcune funzioni: exp, $(1+x)^{-1}$, $(1+x)^{1/2}$, $\cos(x)$, $\sin(x)$. Sviluppi al primo ordine in un punto. Linearità dei piccoli incrementi: esempi dalla geometria e dalla fisica. Legge di Hooke in elasticità. Sviluppo al primo ordine e derivata. Calcolo diretto della derivata di $\exp(x)$, $\log(x)$, x^n, x^{-1}, $x^{1/2}$,$\cos(x)$, $\sin(x)$. Regole di calcolo di derivate: somme, prodotti, composizione, inversa. Studio di successioni mediante sviluppi polinomiali. Formula di Stirling $n! = Cn^{n+1/2}e{-n}(1 + o(1))$ per $n \to \infty$, con una costante $C > 0$ da determinare nel seguito. Sottosuccessioni. Ogni successione nella retta estesa ha una sottosuccessione

monotona e quindi convergente. Massimi e minimi di funzioni: Teorema di Weierstrass. Derivate destre e sinistre per funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Principio variazionale di Fermat. Teorema di Rolle. Teorema di Lagrange. Una funzione derivabile f su un intervallo I è crescente se e solo se $f'(x) \geq 0$ su I ; è costante se e solo se $f'(x) = 0$ su I; è Lipschitziana di costante k se e solo se $|f'(x)| \leq k$ su I. Derivate successive. Se la funzione f ha tutte le derivate nulle in x_0 dall'ordine zero fino al k-esimo, allora $f(x) = o(|x - x_0|^k)$ per $x \to x_0$. Contatti di ordine k fra funzioni. Polinomio di Taylor; sviluppo di Taylor con formula del resto di Peano. Calcolo dello sviluppo di Taylor di alcune funzioni elementari. Funzioni convesse definite su intervalli di $\mathbb{R}$. Una funzione su un intervallo è convessa se e solo se i rapporti incrementali sono crescenti rispetto a ciascuna variabile. Una funzione convessa su $]a, b[$ è localmente lipschitziana. Una funzione derivabile su un intervallo $]a, b[$ è convessa se e solo se la sua derivata è una funzione crescente. Una funzione derivabile due volte su un intervallo $]a, b[$ è convessa se e solo se la derivata seconda è non-negativa. Resto della formula di Taylor in forma di Lagrange. Convergenza di alcune serie di Taylor. Continuità e derivabilità di funzioni inverse. Le funzioni arccos, arcsin e arctan.

VII - Integrazione secondo Riemann

Definizioni, esempi, prime proprietà. Le funzioni integrabili secondo Riemann su un intervallo chiuso e limitato sono uno spazio vettoriale. Linearità e positività dell'integrale. Additività dell'integrale di Riemann rispetto agli intervalli di integrazione. Notazione sullo scambio degli estremi di integrazione $\int_b^a := -\int_a^b$. Se f è integrabile su $[a, b]$ e ϕ è localmente Lipschitziana, anche $\phi(f(x))$ è integrabile su $[a, b]$. Prodotto di funzioni integrabili è integrabile. Continuità uniforme: definizione, esempi e controesempi. Teorema di Heine-Cantor. Le funzioni continue e le funzioni monotone definite su un intervallo chiuso e limitato sono integrabili secondo Riemann. Funzione integrale di una funzione integrabile e sua lipschitzianità. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Ogni funzione continua ammette una antiderivata. Integrali definiti calcolati mediante il TFCI. Regole di calcolo: integrazione per sostituzione e integrazione per parti. Prodotto di Wallis per π Formula asintotica per il coefficiente binomiale centrale. Formula di Stirling per $n!$. Esercizi di calcolo di integrali definiti, per parti e per sostituzione. Integrali impropri di Riemann. Convergenza assoluta di integrali. Principio di confronto. Test integrale per le serie. Integrale euleriano $\int_0^\infty t^x e^{-t} dt$ e la funzione fattoriale